Negative Zahlen

Stichpunkte zu einem Vortrag bei der Waldorflehrertagung in Bad Nauheim 24.1.2015

Hansjörg Bögle

1. Welche Realität kommt den (negativen) Zahlen zu?

„Die ganzen [natürlichen? damaliger Sprachgebrauch?] *Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."* L.Kronecker (1823-1891)

Wurden die Zahlen entdeckt oder erfunden? Im mittelalterlichen Nominalismusstreit (Universalienproblem) geht es darum, ob Allgemeinbegriffe (Universalien) eine reale Existenz besitzen (wie Platons Ideen) oder ob sie nur menschliche Namen für Abstraktionen sind. Beispiele für Allgemeinbegriffe sind: Hirsch, Schall, Dreieck, Zahl…

„Aber unmöglich kann jemand, der die Sachlage überschaut, in dem Ausdruck ‚Zahl' etwas finden, was wirklich eine Existenz hat. … ‚Eins', ‚zwei', ‚drei', ‚fünf', ‚sechs' und so weiter, das hat Existenz. … Denn unmöglich kann ein Hirsch existieren, ohne dass die Gattung Hirsch existiert. ‚Zwei' kann für sich existieren, ‚eins', ‚sieben' usw. kann für sich existieren. Insofern aber das Wirkliche in der Zahl auftritt, ist das, was Zahl ist, eine Eigenschaft, und der Ausdruck Zahl hat keine irgendwie geartete Existenz."

R.Steiner, GA 151, S.33f, 21.1.1914

Steiner nennt nur kleine natürliche Zahlen (vgl. 2: Zweifel Zwietracht, Verzweigung, die Zahl $1729 = 1^3+12^3 = 9^3+10^3$ von Ramanujan im Gespräch mit Hardy als besonders erkannt). Wie ist es bei großen Zahlen? Z.B. bei 169 712 843 501 ist das schwer erlebbar.

Theorem: Es gibt keine natürliche Zahl ohne besondere Eigenschaft.

Beweis: indirekt, angenommen, es gibt Zahlen ohne besondere Eigenschaft, wähle die kleinste davon, diese ist dann besonders, Widerspruch!

Welche Realität besitzen ½, $\sqrt{2}$, π oder -2? Beispiele dafür sind: halber Apfel, Diagonale im Quadrat, Kreisumfang, 2 Euro Schulden. Mir erscheint die Realität dieser Zahlen geringer.

2. Geschichte der negativen Zahlen (genetischer Aspekt, das Werden)

H.Gericke: Zur Geschichte der negativen Zahlen, History of Mathematics: State of the Art, S.279ff

Die negativen Zahlen haben sich über etwa 2000 Jahre eingeschlichen, waren teils nur im Verlauf der Rechnung und nicht im Resultat anerkannt, teils mit der Bedeutung von Schulden teils von Richtungsumkehr.

Babylonien:

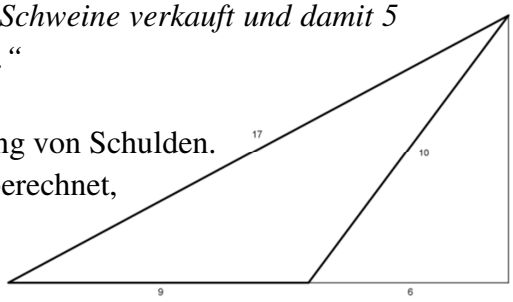
Astronomische Tabelle mit Spalten, die abgezogen werden (frühe Tabellenkalkulation).

China:

4.Jhd. v.Chr.: rote Zählstäbchen für positive Zahlen, schwarze für negative.

Rechenregeln im 1.Jhd n.Chr.

Anwendung bei linearen Gleichungssystemen:
„Jetzt hat man 2 Rinder und 5 Schafe verkauft und damit 13 Schweine gekauft, wobei ein Rest von 1000 Geldstücken übrig blieb. … Man hat 6 Schafe und 8 Schweine verkauft und damit 5 Rinder gekauft, aber das Geld reichte nicht um 600 Geldstücke."



Indien:
Seit Brahmagupta 628 n.Chr. mit Rechenregeln in der Bedeutung von Schulden.
Bhaskara (um 1250), der Höhenabschnitt eines Dreiecks wird berechnet, er liegt außerhalb, d.h. in der entgegengesetzten Richtung.
Arabien:
Nur ein einziges Beispiel (10.Jhd., mit Schuld bezeichnet).
Abendland:
Vor dem 10.Jhd. (fälschlich Beda zugeschrieben, Westdeutschland oder Nordfrankreich), mit Regeln, negative Zahlen werden als nicht-existierend bezeichnet.
Leonardo von Pisa genannt Fibonacci, Liber abaci (1202), Schulden.
Als reine Zahlen 1484 in Triparty von Nicolas Chuquet, Frankreich.
Michael Stifel, 1544, numeri absurdi, numeri ficti infra nihil (erdachte oder fingierte Lösungen), von größtem Nutzen für die Mathematik, geschrieben in der Form (0-a).
Mathematiker wie Pascal (1623-1662) lehnen die negativen Zahlen ab. Euler befürwortet sie 1767 (Vollständige Anleitung zur Algebra).

3. Mathematisch: eine Zahlbereichserweiterung wird definiert. Modelle mit Richtungsangabe

Vorteil: alle Subtraktionen sind ausführbar, Z ist Gruppe, Q, $\mathbb{R}$ bilden einen Körper.
Rechenregeln werden definiert und passen nach dem Permanenzprinzip (Peacock, Hankel).
Achtung (Nachteil): Bei Erweiterungen wird Bisheriges falsch.
Beispiel: Bisher verkleinert die Subtraktion immer, aber jetzt: 5-(-3) = 8.

3.1 Didaktikvorschläge (vgl. mathematik lehren, Heft 183, 2014)

Anschauliche Modelle:
Temperaturskala, Höhe über Meeresspiegel bzw. Erdboden, Jahreszahlen vor bzw. nach Chr.
Abstrakter: Gerade mit Nullpunkt und Skala, rechts +, links -.
D.h. ein Nullpunkt wird mehr oder weniger willkürlich gesetzt. Physik: Temperatur in Kelvin!
Problem: Multiplikation, Division, Ausweg: Fahrstuhlbewegung zeitlich rückwärts (Günther Malle, Mathematikdidaktiker aus Wien)
Mathematische Modelle
Pfeile, vgl. Vektoren (Skalarmultiplikation mit Spiegelung, Problem: Skalar ≠ Pfeil, Division).
Gerade und ungerade Zahlen können als Vorbild für positive und negative Zahlen dienen:

g+g = g	g+u = u	u+g = u	u+u = g
p·p = p	p·n = n	n·p = n	n·n = p

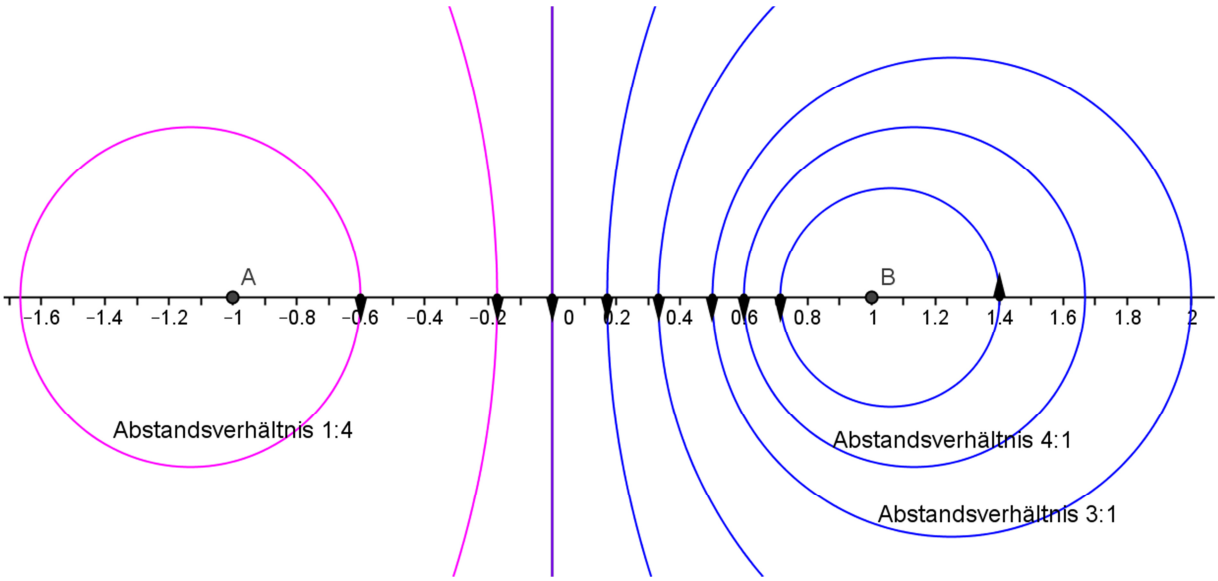
Im Unterricht muss man sich nach einer gewissen Zeit von den Modellen lösen.

3.2 Auftreten von negativen Zahlen in Mathematik und Naturwissenschaft

Als **Zusatzinformation** z.B.
Lage (Integral)
Richtung: Zahlengerade, Geschwindigkeit (negative Beschleunigung = Bremsen), Kraft
Drehrichtung: Winkel, allg. Orientierung
Als Polarität bei elektrischer Ladung, Magnetismus.
(Goethe spricht von Polarität und Steigerung. Was ist die Steigerung? Die komplexen Zahlen?)

3.3 Beispiel: Was sind Kreise mit negativem Radius?

Möglichkeit: Positiver Radius entspricht einer Orientierung gegen den Uhrzeigersinn, negativer Radius einer Orientierung im Uhrzeigersinn.
Apolloniuskreise ermöglichen einen kontinuierlichen Übergang:
Apolloniuskreise (=Divisionskreise) beschreiben den geometrischen Ort der Punkte mit gleichem Abstandsverhältnis zu zwei gegebenen Punkten (vgl. Abstandssumme ⇒ Ellipse).
Bei den blauen Kreisen rechts (positiv orientiert) gilt: AP/BP = c.
Im Inneren der rechten (blauen) Kreise gilt: AP/BP > c.
Das Kreisinnere liegt dabei links von der orientierten Kreislinie.
{P| AP/BP > ¼} beschreibt das **Äußere** des rosa Kreises auf der linken Seite.
Durch den Orientierungswechsel gehört zum > weiterhin der Bereich links der Kreislinie.



„Man hat etwas ganz Besonderes nötig. Man hat sich dann nämlich einen Kreis zu denken, der nicht nach innen gekrümmt ist, sondern der nach außen gekrümmt ist. … Es ist außerordentlich bedeutsam, dass man sich abgibt mit dem Erzeugen von Vorstellungen, die, möchte ich sagen, in solche Kurvenformen noch hineinschlüpfen.“
R.Steiner, Das Verhältnis der verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebiete zur Astronomie, 9.1.1921, GA 323, S.164ff

Orientierte Kreise treten auch bei Lie-Koordinaten auf (S.Lie, 1842-1899).
vgl. J.Richter-Gebert, T.Orendt: Geometriekalküle, S.151ff.

Dabei werden Kreise und andere Objekte als Elemente (homogen) im $\mathbb{R}^5$ (bzw. im $\mathbb{R}P^4$) betrachtet. Wenn eine bestimmte Bilinearform 0 wird, so liegt orientiertes Berühren vor.

Wallis, 1685: „*Es ist unmöglich, dass eine Größe weniger sei als nichts. Trotzdem ist die Annahme einer negativen Größe weder nutzlos noch absurd, wenn sie nur richtig verstanden wird … -3 Schritte vorwärts zu gehen ist dasselbe wie 3 Schritte zurückgehen.*“

4. Vorschlag von Rudolf Steiner, weniger als nichts

„Man sollte z.B. die positiven und negativen Zahlen nicht als etwas an sich betrachten, sondern man sollte die Zahlenreihe nehmen so: 5-1, 5-2, 5-3, 5-4, 5-5, 5-6, jetzt habe ich nicht genug, weil mir eins fehlt, das schreibe ich als -1. Das Fehlende betonen ohne Zahlenlinie. Dann bleiben Sie im Zahlenmäßigen. Die negative Zahl ist die nicht vorhandene Menge, der Mangel des Minuenden. Darin ist viel mehr innere Aktivität! Dadurch hat man die Möglichkeit, beim Schüler Fähigkeiten anzuregen, die viel realer sind, als wenn man alles nur von der Geometrie her macht.“

Konferenzen mit Lehrern, 30.4.1924, GA300/3, S.153ff

„Eine negative Zahl ist ein Subtrahend, zu dem kein Minuend mehr da ist; eine Aufforderung zu einer Operation, zu der kein Stoff mehr da ist, die nicht ausgeführt werden kann.“

Erziehungskunst. Seminarbesprechungen, 5.9.1919, GA 295, S.143ff

4.1 „Weniger als nichts“, Schulden als überzeugendstes Beispiel

Die Interpretation negativer Zahlen als „weniger als nichts“ ist herausfordernd im Vergleich zur Richtungsangabe. Welche Beispiele gibt es außer Schulden? Warum ist gerade dieses Beispiel so überzeugend?

Aspekte bei Schulden: Ein Mangel kommt zum Ausdruck - Schulden haben eine Wirkung - es muss bei jemand anderem (sozialer Aspekt) das entsprechende Kapital vorhanden gewesen sein - dieser erwartet einen Ausgleich in der Zukunft - eine Situation mit Aufforderungscharakter und Dynamik.

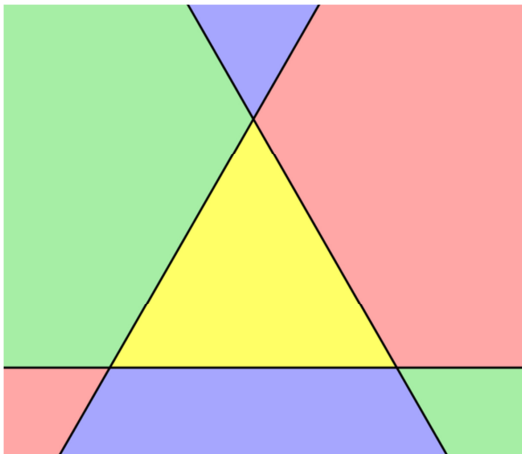
4.2 Weniger als nichts in der Astronomie, negative Intensität der Sonnenmaterie

„Sie werden niemals irgendwie zurechtkommen mit einer Vorstellung, die zusammenhält die Erscheinungen, wenn Sie nicht solche Vorstellungen zugrunde legen, wenn Sie nicht wirklich in der Materie sich eine positive und eine negative Intensität denken, so dass die Materie selber als Erdenmaterie positiv ist, während die Sonnenmaterie als Intensität negativ ist, also gegenüber dem erfüllten Raum nicht nur ein leerer Raum ist, sondern eine Raumaussparung, weniger als ein leerer Raum. Das ist eine Vorstellung, die vielleicht schwierig zu bilden ist. Aber warum sollten sich nicht diejenigen, die gewohnt sind, mathematische Vorstellungen zu haben, eine gewisse Erfüllung des Raumes unter der Größe +a vorstellen können, dann den leeren Raum als Null, und einen Raum der weniger ist als leer, als –a vorstellen können?“

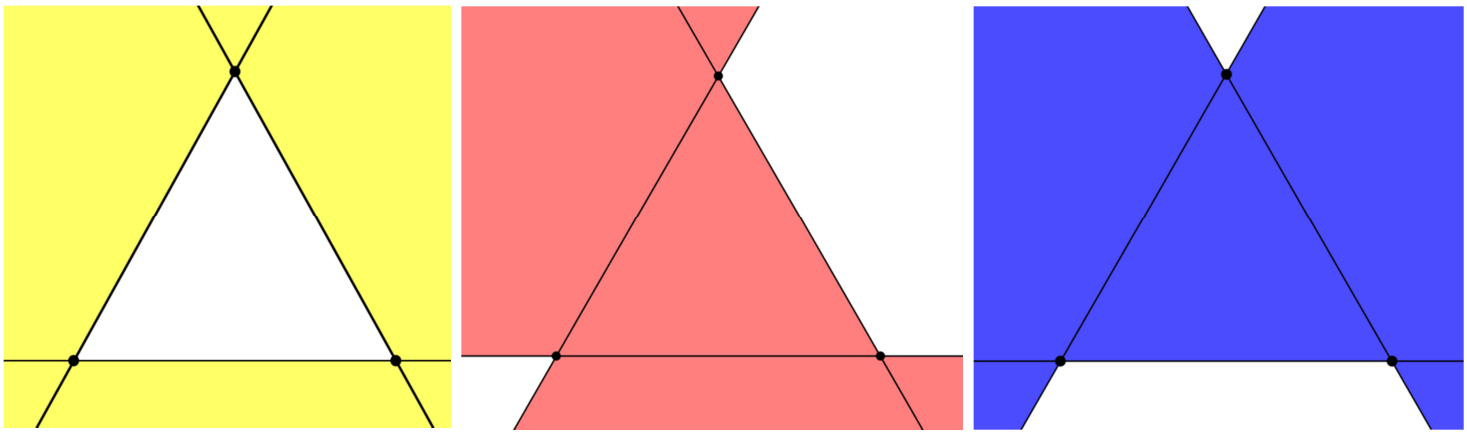
Das Verhältnis der verschiedenen naturwissenschaftlichen Gebiete zur Astronomie, 18.1.1921, GA 323, S.320f.

4.3 Der Gegenraum nach Adams und Locher-Ernst:
Wechselt man die Betrachtung von den vier Punktgebieten, die sich aus drei Geraden ergeben und die der üblichen materiellen Anschauung entsprechen, zu den vier Geradengebieten, die sich aus drei Punkten ergeben, was der dualen gegenräumlichen Anschauung entspricht, so entstehen gerade die ursprünglichen Punktgebiete als Aussparungen (in 3D Tetraeder und Ebenen, vgl. L.Locher-Ernst, Raum und Gegenraum, S.47ff).

4 Punktgebiete:



Je eines der 4 Geradengebiete, die genau eines der Punktgebiete aussparen:



Bemerkung: Hohlformen werden auch als geistige Urbilder der physischen Formen beschrieben (R.Steiner, Theosophie S.124f).

4.4 Ein Beispiel für negative Gestalt, R.Steiner, Wärmekurs, GA 321, S.127
„Diese festen Körper sind diejenigen, welche in sich feste Gestalten zeigen. … Die Gestalten lösen sich auf, verschwinden, wenn der feste Körper in die Flüssigkeit übergeht. Wir haben den vollen Gegensatz zum Festen in dem Auseinanderstreben, in dem Die-Gestalt-Aufheben des gasförmigen Körpers: negative Gestalt.“
4.5 Beispiel Finsternis, nach Ernst Lehrs: Gelebte Erwartung, S.194f:
Frau Kolisko wurde von Rudolf Steiner angeregt, Pflanzen im Finstern wachsen zu lassen. Sie richtete einen Dunkelraum ein. *„Das Ergebnis war nicht das erwartete. So bat sie ihn, sich die Sache selber anzusehen. Er begab sich daraufhin in den Raum und sagte sogleich, da*

könne sich das auch nicht einstellen, denn sie habe ja da keine wirkliche Finsternis … sie habe da nur ‚Abwesenheit von Licht'." Es folgt eine Anweisung Steiners zu einer speziellen Beleuchtung, die den mittleren Teil des Spektrums abschirmt. *„Da stellte sich in der Tat das vorhergesagte Ergebnis ein. Befand man sich in dem Raum, so erlebte man, wie sich vor den Augen eine Art Vakuum erstreckte, das einem förmlich das innere Licht aus den Augen heraussog."*

5. Ein Paradoxon in Zusammenhang mit den negativen Zahlen und seine Deutung durch F.H.B.Franke: Die Drei, IX.Jahrgang, 8.Heft, Nov.1929, S.597-613

Solange wir nur die Addition und Subtraktion betrachten, sind die negativen Zahlen einfach zu den positiven dazugespiegelt. *„Die tieferen Geheimnisse … haben wir jedoch damit noch gar nicht berührt."* Dass die negativen Zahlen nicht völlig gleichwertig zu den positiven sind, zeigt sich an der Multiplikation und Division.

Paradoxon bei <

…1:3=1/3 < 1:2=1/2 < 1:1=1 < 1:1/2=2 < 1:1/3=3 <…<1:0=∞ <??? …< 1:(-1/3)= -3 < < 1:(-1/2)= -2 < 1:(-1)= -1 < 1:(-2)= -1/2 < … also 1 < -1!

Eine Auflösung durch den Zahlenkreis ähnlich wie in der projektiven Geometrie wäre nach Franke „*erschlichen*" und würde einen Erkenntnisschlaf einleiten, statt am Paradoxon das Erkenntnisvermögen zu steigern und zu verwandeln (in Richtung des Lebendigen, Ätherischen, Imaginativen).
Franke verweist im Hinblick auf den Realitätsbereich der negativen Zahlen auf das Äthergebiet und deutet andererseits die Situation auch räumlich: *„Einerseits sind die negativen Zahlen kleiner als die Null. Sie würden also, wenn man sie als Streckenmaße fasst, Punkte bestimmen, deren Entfernungen vom Nullpunkte kleiner als 0 sind, d.h. sie sind bei unserer Darstellung zu suchen im Inneren des Nullpunktes. Andererseits werden wir dadurch, dass sie größer als ∞ sind, genötigt, sie in die unendlichen Raumesfernen hinauszusetzen, d.h. sie als Inhalt der räumlichen Unendlichkeit anzusprechen."* Denn die Ätherkräfte wirken im Inneren des Lebewesens und haben ihre Heimat in unendlichen Raumesfernen.

6. Aussagen Rudolf Steiners zu negativen Zahlen und dem Ätherischen

Es fehlen zunächst die eigene Anschauung und das Erleben zu den Äthern, die als Teil der geistigen Welt vom Hüter der Schwelle abgeschirmt sind.

„Und wenn man nun wirklich eingeht im Gebiet der höheren Wirklichkeit auf das Physisch-Wirkliche, und man bezeichnet das Physisch-Wirkliche mit dem positiven Vorzeichen, so ist man genötigt, einfach das Ätherische, das wirklich Ätherische, wobei man aus dem

Räumlichen hinauskommt, also in das Geistige schon hineinkommt, mit dem negativen Vorzeichen zu versehen.“
Geisteswiss. Impulse zur Entwickelung der Physik II (Wärmekurs), 11.3.1920, GA 321, S.232ff

„…da, wo man vom Äthergebiet zu sprechen hat,…, dass da in den entsprechenden mathematischen Formeln bei gewissen Größen negative Vorzeichen einzusetzen sind, die zu modifizieren sind, indem man nicht nur negative Größen einsetzt, sondern sogar statt Ausstrahlung von einem Punkt die Herstrahlung von einer Peripherie annimmt. … man hat die Wirkung dieser Masse oder Materie nach außen mit positivem Vorzeichen einzusetzen, so hat man das, was im Äther demselben entspricht, mit negativen Vorzeichen einzusetzen. Was in dem einen Druckkraft ist, ist in dem andern Saugkraft. … Dann kommt man zurecht mit der Erscheinung, dann hat man nicht nötig, den Äther abzuschaffen und eine Null zu setzen, sondern, wie man es in einem anderen Gebiete macht, von plus zu minus überzugehen.“
Proben über die Beziehungen der Geisteswissenschaft zu den einzelnen Fachwissenschaften, 14.1.1921, aus: Gegenwart, Jahrg.14, 1952, S.165f.

7. Vorstellungen zum Ätherischen in Verbindung mit negativen Zahlen:

1. Das Ätherische ist nicht mit den Sinnen wahrnehmbar, es gehört dem Bereich des Übersinnlichen an. Im Sinnlichen sind negative Zahlen schwer zu erklären (-3 Äpfel?).
2. Das Ätherische ist gegensätzlich zum Physisch-Materiellen (ähnlich wie die Gegensätze: Zentrum – Peripherie, Punkt – Fläche, drücken – saugen, Bewegung nach unten – oben, schwer – leicht …). In der Subtraktion und den negativen Zahlen drückt sich ebenfalls ein Gegensatz zu den positiven aus (andere Richtung bzw. Orientierung, weg statt dazu).
3. Das Ätherische ist nicht in gleicher Weise im Raum wie materielle Objekte (nach Franke im Inneren der Punkte und in der unendlichen Peripherie). Äther können sich durchdringen, etwa wie wir im Modell für die Subtraktion entgegengesetzte, sich überlappende Pfeile hatten. L.Locher-Ernst (Raum und Gegenraum, S.47ff) betrachtet die Geradenmenge eines Hüllbereichs (z.B. gegeben durch 3 Punkte). Diese Geraden überschneiden sich, wenn wir punktmäßig denken.
4. Nach E.Bindel (Das Rechnen) drückt auch die Kurve der Subtraktion, die Hyperbel (vgl. Ellipsen bei Addition) das Polare in ihren zwei Ästen aus.
5. Die Pflanzen, die als sinnlicher Ausdruck des Äthergebiets gelten können, wachsen in zwei Richtungen, nach oben und nach unten, zur Peripherie und zu einem Zentrum.
6. E.Bindel bringt die Subtraktion mit dem Element Wasser in Verbindung, denn im Wasser erfährt jeder Körper eine Gewichtsverminderung durch die Auftriebskraft. Das Wasser, das durch sein verbindendes, bewegliches Fließen und seine Kapazität, Stoffe zu lösen und zu transportieren, für das Leben unentbehrlich ist, steht wiederum als Sinnbild für die Ätherwelt (vgl. H.Grill: Ernährung und die gebende Kraft des Menschen, ^{7}2013, S.42).
7. H.Grill (Das Wesensgeheimnis der Seele, S.100ff) beschreibt den Ätherleib als bewegt. Schulden bzw. Fehlendes erzeugen ebenfalls eine Dynamik.